Exercice N°4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour C.

2°) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C d'abscisse 0.

3°) Dans le graphique de la feuille annexe, on a représenté la courbe C et la droite $\Delta : y=x$.

La droite Δ coupe C en un point d'abscisse α.

a) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

b) En déduire que $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

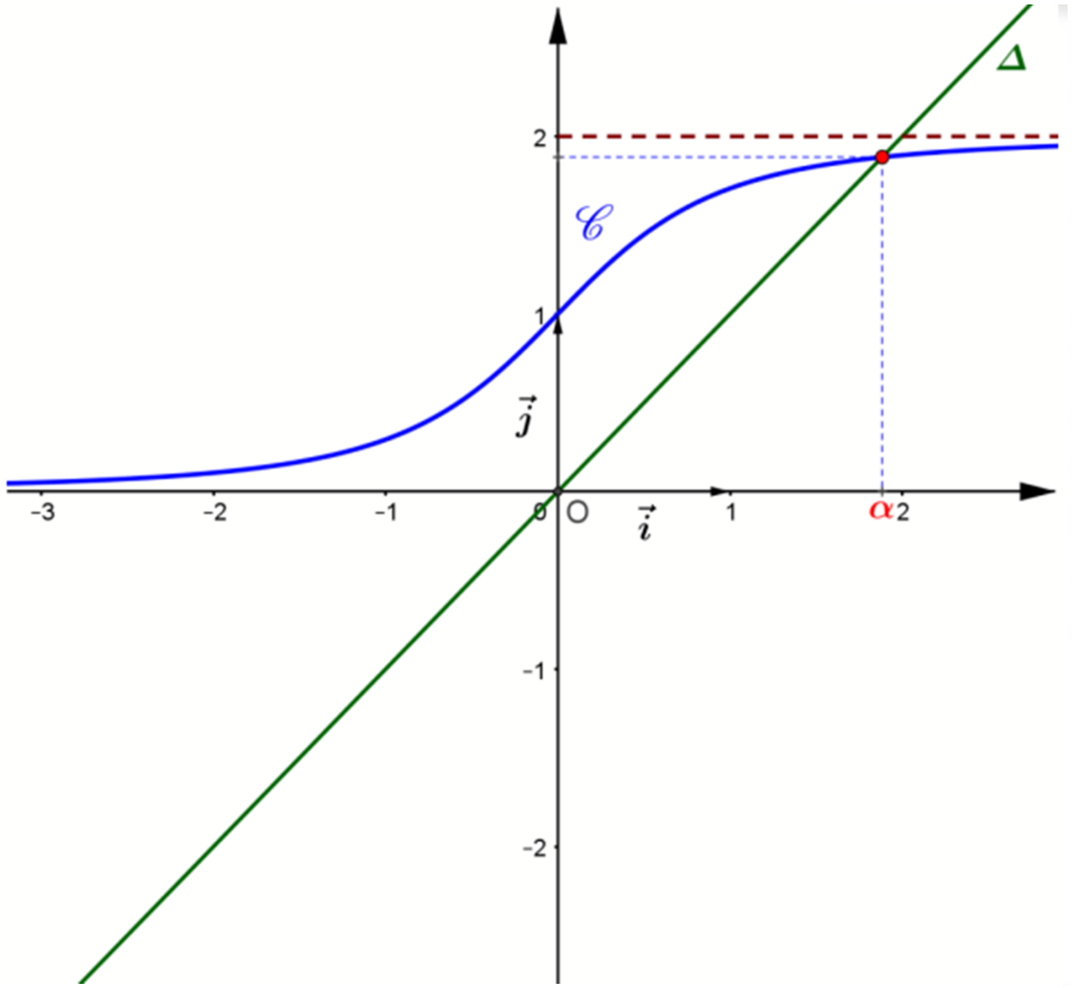
4°) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

b) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe C' dans le même repère.

5°) On pose $I_{\alpha}=\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)\,dx$.

a) Que représente graphiquement le nombre I_{α} ?

b) Calculer, I_{α} en fonction de α .